数理解析研究所講究録 1213 巻 2001 年 28-33



# A Note on Hrushovski's Pseudoplanes

池田宏一郎 (Koichiro Ikeda)
豊田工業高等専門学校

安定な理論 (stable theory) の可算モデルに関する有名な予想として Lachlan 予想が知られているが、安定な理論を単純な理論 (simple theory) に置き換えた次の予想がある：

**拡張された Lachlan 予想** 可算モデルの数が有限個となる様な単純な理論は存在しない。

この予想は解かれてないが、もし可算モデルの数が有限個となる単純理論が存在するならば、その理論は無限の weight をもつ small な理論でなければならない。ここでは Hrushovski[2], Herwig[1] の方法を用いて、以下の定理を証明することを目標とする：

**定理** 無限の weight をもつ、安定でないが単純かつ small な理論が存在する。更にこの理論の 1-type はひとつしかない。

## 1 関数 $f$ の定義

- 二項関係 $R_i(*,*)(i<\omega)$ は次の条件を満たしているものとする：
  1. 各 $i<\omega$ に対して $\models \forall x \forall y (R_i(x,y) \rightarrow R_i(y,x))$;
  2. 各 $i<\omega$ に対して $\models \forall x \forall y (R_i(x,y) \rightarrow x \neq y)$;
  3. $i \neq j \rightarrow \models \forall x \forall y (\neg(R_i(x,y) \wedge R_j(x,y)))$
- 言語 $L=\{R_i : i<\omega\}$.
- $A, B, C, \ldots$ は有限 $L$ 構造を表す。

- 自然数の増加列 $(s_i)_{i<\omega}, (k_i)_{i<\omega}$, および自然数から実数への関数の列 $(f_i)_{i<\omega}$を次の様に構成する：

  1. $s_0 = 2$;
  2. $f_0(x) = \dfrac{1}{s_0}\log x$;
  3. $k_0 = \min\{k < \omega : f_0(k) > 2\}$;
  4. $s_{n+1}$を次の条件を満たすようにとる：
     - $s_{i+1} \geq 2s_i$;
     - 任意の $A$ に対して、$|A| \leq 2k_n, \delta_n(A) > f_n(|A|) \Rightarrow \delta_n(A) > f_n(|A|) + \dfrac{4k_n}{s_{n+1}}$. (但し、$\delta_n(A) = |A| - \sum_{j=0}^{n} \dfrac{1}{s_j}|R_j^A|$);
  5. $f_{n+1}(x) = \begin{cases} f_n(x) & (x \leq k_n) \\ \dfrac{1}{s_n}\log\dfrac{x}{k_n} + f_n(k_n) & (k_n \leq x) \end{cases}$
  6. $k_{n+1} = \min\{k < \omega : f_n(k) > n+2\}$

**定義**　関数 $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ を次の様に定義する：

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) & (0 \leq x \leq k_0) \\ f_1(x) & (k_0 < x \leq k_1) \\ f_2(x) & (k_1 < x \leq k_2) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{cases}$$

**定義**　$A, B$ を有限 $L$ 構造とする。このとき

- $\delta_i(A) =_{\mathrm{def}} |A| - \sum_{j=0}^{i} \dfrac{1}{s_j}|R_j^A|$.
- $\delta(A) =_{\mathrm{def}} \lim_{i\to\infty} \delta_i(A)$.
- $\delta(A/B) =_{\mathrm{def}} \delta(AB) - \delta(B)$.

特に $A \subset B$ のとき

- $A \leq B$ ($A$ は $B$ で閉) $\Leftrightarrow_{\mathrm{def}}$ $X \subset B - A$ に対して$\delta(X/A) > 0$.

$\delta$の定義より$\leq$に関する以下の性質はあきらか。

**性質 1**　(i) $A \subset B \subset C \in K$ かつ $A \leq C$ ならば $A \leq B$.
(ii) すべての $A \in K$ に対して $\emptyset \leq A$
(iii) $A, B \subset C \in K$ とする。このとき $A \leq C$ ならば $A \cap B \leq C$.

**注意 2**　関数 $f$ は次の性質を満たす：

1. $f$ は上に凸；
2. $k_n < x \leq k_{n+1}$ ならば $f'(x) = \dfrac{1}{s_n x}$;
3. $|A| \leq 2k_n$ かつ $\delta_n(A) > f_n(|A|)$ ならば $\delta(A) > f(|A|)$.

# 2　$K$-generic な構造

**定義**　有限 $L$ 構造のクラス $K$ を以下のように定義する：

$$K =_{\text{def}} \{A : \text{任意の } B \subset A \text{ に対して } \delta(B) > f(|B|)\}.$$

**定義**　$A, B, C$ を $A = B \cap C$ を満たす有限 $L$ 構造とする．このとき $B$ と $C$ の $A$ 上の free amalgam（$B \otimes_A C$ とかく）とは次の様な $L$ 構造である：
(i) $|B \otimes_A C| = B \cup C$;
(ii) $R^{B \otimes_A C} = R^B \cup R^C$.

**補題 3(Amalgamation)**　$A \leq B \in K, A \leq C \in K, D = B \otimes_A C$ ならば $B \leq D, C \leq D, D \in K$.

**証明**　$B \leq D, C \leq D$ はほぼあきらか。$D \in K$ を示す．$|C| \leq |B|$ と仮定してもよい．$k_n < |B| \leq k_{n+1}$ とする。$A \leq B$ より

$$\frac{\delta_n(B) - \delta_n(A)}{|B - A|} \geq \frac{1}{s_n |B|}.$$

注意 2.2 より

$$\frac{\delta_n(B) - \delta_n(A)}{|B - A|} \geq f'(|B|).$$

よって注意 2.1 より

$$\delta_n(D) > f_n(|D|).$$

明らかに $|D| \leq 2k_n$ であるので注意 2.3 より

$$\delta(D) > f_n(|D|) \geq f(|D|).$$

故に $D \in K$. ■

**定義**　次の条件を満たすような $L$ 構造 $M$ を $K$-generic という：

1. $M$ は可算；
2. $A$(有限) $\subset M$ ならば $A \in K$;
3. $A \leq B \in K$ かつ $A \leq M$ ならば $B \cong B' \leq M$ を満たすような $B'$ が存在する。

**注意 4**　「$A$ は閉」は定義可能：すなわち $A$ を解にもつ論理式 $\phi(\bar{x}) \in L$ で、$\phi(A')$ ならば $A'$(閉) $\cong A$, を満たすものがある。

$M$ を $K$-generic な構造とする（性質 1 よりその様な $M$ は存在する)。

**補題 5**　$M$ は飽和モデル。

**証明**　有限集合 $A(\subset M)$ 上のタイプ $p$ が $M$ で解をもつことを示す。ここで $A \leq M$ と仮定して構わない。$N$ を $\omega$ 飽和なモデルとする。$N$ の飽和性より、$\mathrm{tp}(C) = \mathrm{tp}(A)$ を満たす $C \subset N$ が存在するので, $\sigma(A) = C$ を満たす elementary map $\sigma$ が存在する。再び $N$ の飽和性より $\sigma(p)$ の解は $N$ の中に取れるので、その解を $D$ とする。$CD \leq N$ と仮定して構わない。このとき $M$ が generic であることより、

$$AB \leq M, AB \cong CD$$

を満たす $B \subset M$ が存在する。
主張：$\tau(AB) = CD$ となる elementary map $\tau : M \to N$ が存在する。
証明：$L$ 論理式を並べたものを $\{\phi_i(\bar{x}, \bar{y}_i) : i < \omega\}$ とする。このとき Back-and-forth で次の条件を満たす $(E_i)_{i<\omega}, (F_i)_{i<\omega}$ を構成する：
(i) $AB = E_0 \leq E_1 \leq E_2 \leq \ldots \leq M$;
(ii) $M = \bigcup F_i$;

(iii) $CD = F_0 \leq F_1 \leq F_2 \leq \ldots \leq N$;
(iv) $E_iE_{i+1} \cong F_iF_{i+1}$;
(v) $i$が奇数のとき、各$j \leq i$に対して$\phi_j(\bar{x}, \bar{d}) \in L(F_i)$が無矛盾であるならば$F_{i+1}$の中に解をもつ。

$M$を並べたものを$(a_i)_{i<\omega}$とする。
$i$が偶数のとき：$E_i$に入っていない$M$の元で一番インデックスが小さいものもをとり$E_i$との閉包を$E_{i+1}$とする。このとき

$$XF_i \cong E_{i+1}E_i, X \leq M$$

は論理式で表現できる（注意4）。よって$N$の中にその解があるので、それを$F_{i+1}$とすればよい。
$i$が奇数のとき：各$j \leq i$に対して$\phi_j(\bar{x}, \bar{d}) \in L(F_i)$が無矛盾ならば$N$の中に解がとれる。それら（有限個）をすべて集めてきて$F_i$と閉包をとったものを$F_{i+1}$とする。このとき$M$がgenericであることより、$E_{i+1} \leq M, E_{i+1}E_i \cong F_{i+1}F_i$を満たす$E_{i+1}$が$M$の中に取れる。

$M' = \bigcup_i F_i$とすると、$M \cong M' \prec N$. よって$\tau(AB) = CD$を満たす$M$から$N$へのelementary map $\tau$が存在する。

したがって$p$は$M$の中に解$B$をもつので$M$はsaturated. ■

**系 6**　Th($M$)はsmall.

# 3　単純性とweight

**定義**　$d_M(A) = \inf\{\delta(B) : A \subset B \subset_\omega M\}$

**定義**　$A \downarrow_C B$を次の様に定義する：
(i) $d(A/BC) = d(A/C)$;
(ii) $\mathrm{cl}(AC) \cap \mathrm{cl}(BC) \subset \mathrm{cl}(C)$.

**定義**　三項関係$* \downarrow^0_* *$が以下の性質を満たすとき独立概念であるという：
(i) 不変性
(ii) 対称性：$A \downarrow^0_C B$ならば$B \downarrow^0_C A$.
(iii) 推移性：$A \downarrow^0_C B, A \downarrow^0_{CB} D$ならば$A \downarrow^0_C BD$.
(iv) 拡張性:任意の$\bar{a}, A, B$に対して、$\bar{a}' \downarrow^0_A B$を満たす$\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$の解$\bar{a}'$が存在

(v) 局所性：任意の$\bar{a}, A$に対して$\bar{a} \downarrow^0_B A$を満たす可算な$B \subset A$が存在する。
(vi) 有限性：$\bar{a} \downarrow^0_A B \Leftrightarrow$ 任意の$\bar{b} \in B$に対して$\bar{a} \downarrow^0_A \bar{b}$.
(vii) Independence Theorem:あるモデル$M$に対して$\bar{a} \downarrow^0_M \bar{b}, \bar{x} \downarrow^0_M \bar{a}, \bar{y} \downarrow^0_M \bar{b}$であるとする。このとき$\bar{z} \downarrow^0_M \bar{a}\bar{b}$を満たす$\mathrm{tp}(\bar{x}/M\bar{a}) \cup \mathrm{tp}(\bar{y}/M\bar{b})$の解$\bar{z}$が存在する。

このとき次の補題が導かれる（詳しくは[3]）。

**補題 7** (i) $* \downarrow_* *$は独立概念.
(ii) $T$は単純（かつ非安定）。

**補題 8** $\mathrm{wt}(T) = \infty$.

**証明** 次の様な$a, a_i (i < \omega)$が$M$の中に取れる：

- $\{a\} \cup \{a_0, a_1, ...\} \leq M$;
- $R_i(x, y) \Leftrightarrow \{x, y\} = \{a, a_i\}$.

このとき各$i < \omega$に対して$a \not\downarrow a_i$. また各$i < \omega$に対して$2s_i \leq s_{i+1}$なので

$$\delta(a/a_0, a_1, ...) = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{s_j} \geq 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} > 0$$

よって$a_0 a_1 ... \leq a a_0 a_1 ... \leq M$であるので$\downarrow \{a_i\}_{i<\omega}$. よって$\mathrm{wt}(a) = \infty$. ■

## 参考文献

[1]Bernhard Herwig, Weight omega in stable theories with few types, Journal of Symbolic Logic, vol.60, 353–373, 1995
[3]Ehud Hrushovski, Simplicity and the Lascar group, preprint, 1997
[3]Frank O. Wagner, Simple Theories, Kluwer Academic Publishers, 2000